

ON APPLICATIONS OF THRUST LINES TO SIMPLY-SUPPORTED NO-TENSION PANELS

Abstract

The paper details about a method suitable for computing a family of thrust lines in a rectangular, simply supported masonry panel under its own weight. The masonry is assumed as a homogeneous and perfectly no-tension material. Because of the chosen boundary conditions, thrust lines, whose second derivative is equal to the load divided by the thrust, pass through the bottom corners of the panel. The method allows obtaining closed-form solutions, useful for comparison with numerical results. Findings of the paper also suggest that the value of the thrust, which corresponds to the solution of minimal stored energy, can be asymptotically approximated.

Keywords: Masonry | No-tension material | Thrust lines | Plane solution | Closed-form solution

Introduction

A growing sensitivity towards Sustainable Development and Environmental Sustainability, to achieve a reduction of environmental cost related to the use of material in buildings, has stimulated the increase of research interested in developing new or analyzing in depth existing construction techniques, which may be capable of ensure savings in terms of employed resources, reduction of waste production, and even extension of the durability of construction. In particular, traditional techniques, being rich in culture and tradition, represent often a database of good practices able to reduce the environmental costs of the construction. Some contexts from the Mediterranean and the Middle East areas can serve to demonstrate the actual, or even only proposed, use of sustainable technologies aimed at regenerating parts of the urban and peri-urban environments, in the respect of existing cultural and natural environments, while minimizing impact and carbon footprint [1]. Limiting ourselves to the case of Italy, it is interesting to observe that, while the majority of built environment and historical building heritage is made of masonry structures, the most part of new constructions built from the end of the 2nd World War till today, both for civil and industrial use, as houses or sheds, are made of reinforced concrete, or of steel, in some cases. It is possible to argue that the reasons for such a huge diffusion in comparison to other techniques can be found

in high mechanical performances of reinforced concrete and steel and also on the availability of reliable models to design structure made such materials.

However, employing both concrete and steel for buildings has a huge environmental costs. Indeed, producing concrete and steel requires a large amount of energy and material (as it happens in marl quarries and in extraction of iron) with a consequent high production of waste and CO₂. Further, in the dismount phase, large part of used material cannot be recycled, thus increasing the amount of waste. Further, for many different reasons, maintenance is often difficult to carry out, as recent unfortunate events, in Italy and abroad, have emphasized.

The situation changes in case of traditional buildings, often built using different materials for specialized parts of the construction: for instance in the same building there are walls, made of stones or bricks (in some cases used in combination) or even in any kind of earth construction as adobe, cob and rammed earth, while floors can be made of timber or, in the most important buildings, vault or domes. Naturally, the environmental impact of such traditional building techniques is greater than zero, being however significantly smaller than in case of steel and concrete. Furthermore, maintaining is easier in comparison to steel and concrete and allow extending life of buildings over very long time. Of course, mechanical performances of traditional techniques are not comparable with reinforced concrete or steel. However, buildings, as small houses, could be designed for small to moderate performances, compatible with traditional techniques and materials, restricting use of higher strength materials only to special buildings and structures. Unfortunately, masonry buildings are very complicated to model, for at least two reasons:

- *De Saint-Venant Postulate* is no longer applicable due to the shape of masonry elements;
- employed materials (as stone or clay, for instance) have very low resistance to tensile traction.

As a consequence, consolidated knowledge usually applied in structural design, must be revisited and suitable models must be considered in studying masonry. We refer to [2] for a critical insight on modeling of masonry and its behaviour.

The idea that masonry is essentially a no-tension material able to sustain infinite compressive strength, zero tensile strength and in which sliding between joints is not allowed [3], stands behind the design of all masonry structures, since antiquity[4]. Such a model gives, on the base of limit analysis[3], describes the collapse of masonry structures, while the analysis before the collapse requires a description of strain. The no-tension model equipped with a proper constraint on the strain has been developed since late 70s and early 80s by many Italian researchers[5]-[11]. A solution for a rectangular no-tension thin wall is proposed in [12]. The mathematical systematization is presented in[13] and a complete synthesis of the model was presented in[14]. More recently, the problem of equilibrium has been formulated as a minimum problem for the complementary energy functional over the set of statically admissible stress fields [15]-[16]. For detailed surveys and reviews on methods and models available for masonry structures, we refer, among others, to [17], devoting special attention to the research done in Italy on the topic, and to[18], also considering microstructured models.

Let us consider a panel referred to a Cartesian frame $0x_1x_2x_3$, being x_3 orthogonal to the panel and x_2 in the same direction of gravity and vertical loads, being zero any other load. The equilibrium problem can be restricted to searching for a stress state acting in the mid-plane of the panel only, satisfying

$$\begin{cases} \sigma_{11,1} + \sigma_{12,2} = 0 \\ \sigma_{12,1} + \sigma_{22,2} + \chi_2 = 0 \end{cases} \quad (1)$$

where χ_2 represent the body force¹. Since Eqs. (1) contain three unknown, there are infinitely many solution, and among those ([19], p.32), the exact one attain the minimum of the mechanical stored energy ([19], §5.6, p.62), with deformations satisfying internal and boundary congruence. However, although the problem is correctly formulated, it is not easy to find its solution, becoming even more complicated in case of masonry panels. Indeed in such cases, the stress tensor must be negative semi-definite, i.e[7]:

$$\sigma_{11} \leq 0, \sigma_{22} \leq 0, \sigma_{11}\sigma_{22} - \sigma_{12}^2 \geq 0 \quad (2)$$

which, resemble the Coulomb criterion implying the Mohr circle must be in the negative half-plane of stresses[7] (see Fig.1).

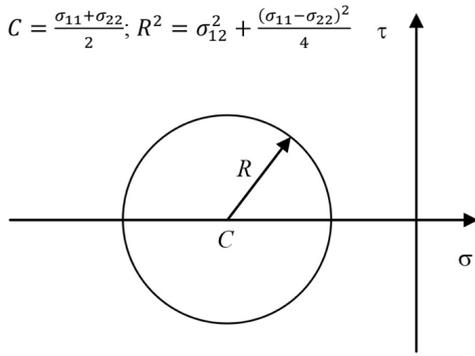


Fig. 1 - Coulomb Criterion

If the exact solution for the elastic problem satisfies also inequalities (2) in any point, then it is solution for the no-tension panel. On the contrary, if along any isostatic line at least one of the three inequalities (2) vanishes, there are parts of the panel not collaborating in the equilibrium², meaning that the shape of the panel and the part contributing to fulfill the equilibrium are not necessarily coincident. Indeed being not known in advance the reacting part, i.e. the structure, and the inert part makes the research of the solution a very hard task to accomplish.

The thrust line

In masonry walls entirely supported by the ground (or by other parts of the structure), a solution satisfying the equilibrium³ may be searched as the sum of a solution built for body forces (vertical isostatic lines) and a strut living in the region of the panel subjected to external loads[20], p. 64 (with isostatic lines having the same slope of load), as seen in Fig. 2. However, it is noteworthy that this is a strong approximation[7], simple to find, but not in agreement with the last of Eqs. (2). This latter, being a nonlinear inequality, implies that a simple combination of single effects is not allowed.

The research of a whatever approximate solution is more complicated if a panel is assumed restrained on its vertical sides and free on the bottom surface: in such a situation, the strut can be replaced by a thrust line (Fig. 3), polygonal in case of point loads or continuous in case of distributed loads.

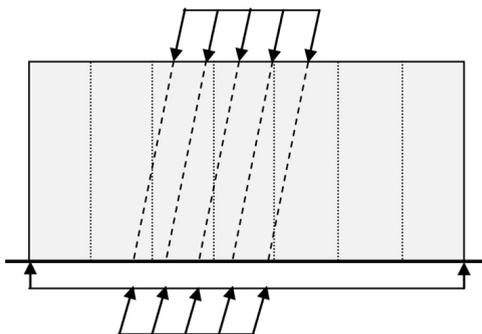


Fig. 2 - Wall with a strut under inclined external load

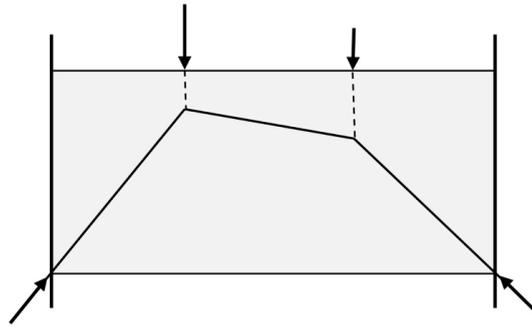


Fig. 3 - Polygonal thrust line under point loads.

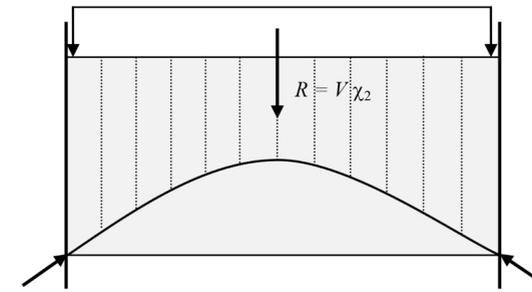


Fig. 4 - Thrust line under body forces.

Whenever, body forces χ_2 are taken into account, they can be seen as a dead load uniformly distributed on the top end of the panel to be equilibrated by a suitable thrust line (Fig. 4).

Such a solution, which is reminiscent of results in the field of the mechanics of arches ([21], § 6.7, p.133) is based on the idea that stresses are transmitted to the thrust only along the vertical, without any horizontal and tangential stress, that is both σ_{11} and σ_{12} vanish, and also neglecting the portion of the panel located below the thrust line, i.e. the inert part. This contribution is aimed at finding a thrust line built taking into account also such an inert part. Because of the equilibrium along the (vertical) x_2 -direction of an infinitesimal slice of the thrust line $p(x_1)$,

$$\partial_1^2 p(x_1) = -\frac{q(x_1)}{c} \quad (3)$$

holds. In Eq.(3), C stands for the thrust. While C is constant⁵, the axial force along the line is variable and given by

$$N(x_1) = C \sqrt{1 + \partial_1 p(x_1)^2},$$

attaining the minimum where i.e. at $x_1=0$, where $N(0)=C$ is achieved.

The first thrust line

Let us consider Fig.5, to which we refer for notations. In order to find the thrust line in the adopted frame of reference, the load $q_1(x_1)$ acting on the thrust line $p_1(x_1)$ is given by

$$q_1(x_1) = (H - p_1(x_1))\chi_2 S$$

being S the thickness of the panel. Equation (3) is rewritten as

$$\partial_1^2 p_1(x_1) = -\alpha_1 (H - p_1(x_1))$$

where $\alpha_1 = \chi_2 S / C_1$ is set.

Since the solution must pass through the points of coordinates $(-b, 0)$ and $(+b, 0)$, we attain

$$p_1(x_1) = H(1 - \gamma_1 \cosh(x_1 \sqrt{\alpha_1})) \quad (4)$$

where $\gamma_1 = \text{sech } b\sqrt{\alpha_1}$; the intercept with x_2 , that is the height of the thrust line at $x_1=0$, is $i = H(1 - \gamma_1)$ and its curvature varies with C_1 . In particular, it is verified that

$$\lim_{C_1 \rightarrow 0} p_1(x_1) = \begin{cases} H, & |x_1| < b \\ 0, & |x_1| = b \end{cases}$$

$$\lim_{C_1 \rightarrow +\infty} p_1(x_1) = 0$$

meaning that, as C_1 increases from 0 to the limit $+\infty$, the thrust line has the intercept with x_2 which goes from H down to 0 (see Fig.7).

The axial force has its minimum at $x_1=0$, that is $N_1(0) = C_1$ and reaches its maximum value at $x_1=|b|$, with $\partial_1 p_1 = -H\gamma_1 \sqrt{\alpha_1} \sinh(x_1 \sqrt{\alpha_1})$.

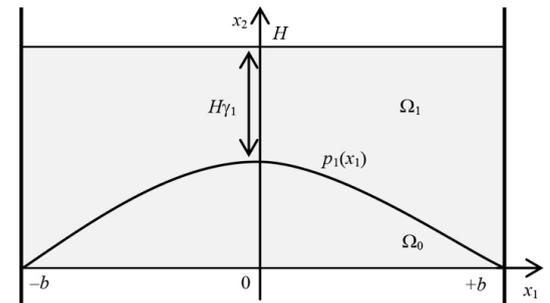


Fig. 5 - The thrust line $p_1(x_1)$.

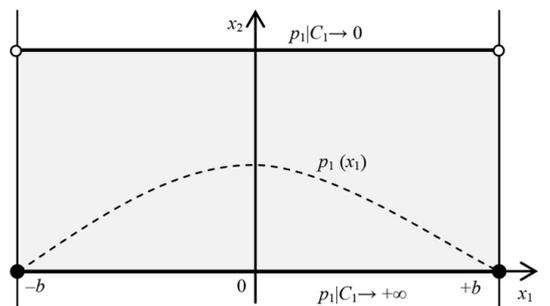


Fig. 6 - Limit positions of $p_1(x_1)$



Fig. 7 - The intercept with x_2 , i.e. the height of the thrust line at $x_1=0$, as a function of C_1

Figure 8 collects a number of results obtained on a panel having dimensions $0.3 \text{ m} \times 0.7 \text{ m} \times 3.0 \text{ m}$ and mass density of 1200 kg m^{-3} : by lowering the value of thrust to 123 N , the corresponding line is flattened to the bottom side of the panel, in agreement with Eq.(4). Of course, physically, compression is not allowed to vanish because at least body forces are always greater than zero, nor to increase indefinitely, since in such a case strength of material will be reached.

Although to take into consideration this aspect is definitely beyond of the scope of this contribution, it is reasonable to admit the existence of a limit value for C_1 , over which the panel would crack and the corresponding thrust line would be characterized by the smallest achievable curvature.

The second thrust line

Once $p_1(x_1)$ has been found, the panel is divided in a portion Ω_1 resting on it and a part Ω_0 , (see Fig.5) apparently not in equilibrium, and as such doomed to fall down.

However, we still can search for a second thrust line, say p_2 , able to sustain the part of the panel below p_1 , say Ω_2 . Let us refer to Fig.9, and define the load $q_2(x_1)$ acting on $p_2(x_1)$ as

$$q_2(x_1) = (p_1(x_1) - p_2(x_1))\chi_2 S.$$

Now, Eq.(3) becomes

$$\partial_1^2 p_2(x_1) = -\alpha_2 (p_1(x_1) - p_2(x_1)),$$

where it is set $\alpha_2 = \chi_2 S / C_2$.

Again, under the hypothesis that the solution passes through the points of coordinates $(-b, 0)$ and $(+b, 0)$, we attain:

$$p_2(x_1) = H \left[1 + \beta_{1,2} \gamma_1 \cosh(x_1 \sqrt{\alpha_1}) - (1 + \beta_{1,2}) \gamma_2 \cosh(x_1 \sqrt{\alpha_2}) \right] \quad (5)$$

$$\text{where } \gamma_2 = \text{sech } b \sqrt{\alpha_2},$$

$$\beta_{1,2} = \frac{\alpha_2}{\alpha_1 - \alpha_2} = \frac{c_1}{c_2 - c_1}.$$

Now, the intercept with x_2 is

$$i' = H \frac{c_2(\gamma_2 - 1) - c_1(\gamma_1 - 1)}{c_1 - c_2} \quad (6)$$

shown in Fig.10.

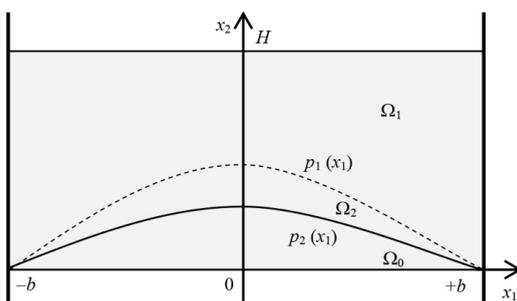


Fig. 9 - The second thrust line p_2

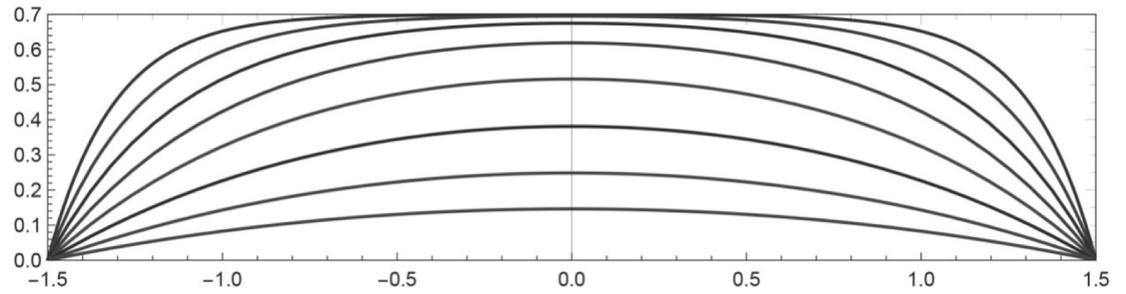


Fig. 8 - Thrust lines in a rectangular panel under its own weight and different thrusts.

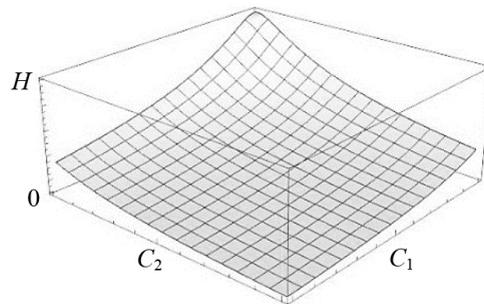


Fig. 10 - The second thrust line p_2

Furthermore, it is possible to recognize (see Fig. 11)

$$\lim_{C_1 \rightarrow 0} p_2(x_1) = H(1 - \gamma_2 \cosh(x_1 \sqrt{\alpha_2})),$$

$$\lim_{C_2 \rightarrow 0} p_2(x_1) = H(1 - \gamma_1 \cosh(x_1 \sqrt{\alpha_1})),$$

$$\lim_{C_2 \rightarrow +\infty} p_2(x_1) = 0.$$

Indeed, such limits say that p_2 takes the same form of Eq.(4), for $C_1 \rightarrow 0$, since Ω_1 vanishes; p_2 converges to p_1 for $C_2 \rightarrow 0$ and Ω_2 vanishes; finally p_2 flattens down to the x_1 -axis for $C_2 \rightarrow +\infty$. Again, we can see that the axial force $N_2(x_1)$ along p_2 goes from the minimum $N_2(0) = C_1$ to the maximum value given by

$$N_2(|b|) = C \sqrt{1 + \partial_1 p_2(|b|)^2}.$$

Notice that Eq.(5) is discontinuous for $C_2 \rightarrow C_1$, for which the differential equation solving the problem takes the form

$$\partial_1^2 p_2(x_1) = -\alpha_1 (p_1(x_1) - p_2(x_1))$$

whose solution is

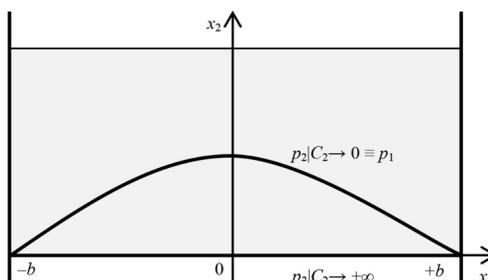


Fig. 11 - Limit positions of the thrust line p_2

$$p_{2,\text{lim}}(x_1) = H \left[1 + \frac{x_1}{2} \sqrt{\alpha_1} \gamma_1 \sinh(x_1 \sqrt{\alpha_1}) - \gamma_1 \delta_2 \cosh(x_1 \sqrt{\alpha_1}) \right] \quad (7)$$

where $\delta_2 = 1 + \frac{b}{2} \sqrt{\alpha_1} \tanh(b \sqrt{\alpha_1})$ is set and the intercept with x_2 is now $i'' = H(1 - \gamma_1 \delta_2)$.

A comparison of thrust lines

For further insight, let us suppose that, in a given no-tension panel, a natural arch, of rise $x_2=f$, took place and let's try to understand if it is better to assume the existence of one thrust line of height f or two, the second one having intercept f .

Because of the complicated structure of Eqs. (4), (5) and (7), in what follows we will skip analytical detail, leaving it for future work, and consider results from numerical simulations on the same panel reported in Fig.8, which we recall has dimensions $0.3 \text{ m} \times 0.7 \text{ m} \times 3.0 \text{ m}$ and mass density of 1200 kg m^{-3} . On assuming the rise of the natural arch developed inside the panel is $f = 0.1 \text{ m}$, the two curves reported in Fig.12 have been computed: the first, blue-colored one, from Eq.(4), is characterized by a thrust of 25.5 kN (2495 kgf); the second, red-colored one, from Eq.(7), has a thrust of 6.3 kN (645 kgf), which is doubled due to the force applied to the dashed, orange-colored curve, thus attaining a total of 12.7 kN (1290 kgf). It is noted that the portion of panel ($\Omega_1 + \Omega_2$ in Fig.12) sustained by the first and second thrust lines is pretty the same, while the thrusts are much different. Hence, we can argue that the second (red-colored) line, to which corresponds a small thrust at supports, is more desirable than the first one.

By setting $C_2 = m C_1$ in Eq.(7), with m varying from 0 up to 17, it has been possible to compute curves in Fig.13, where the values of the thrust at the supports are reported versus the rises of thrust lines (i.e. the intercepts), with the smallest thrusts invariably achieved at $m = 1$.

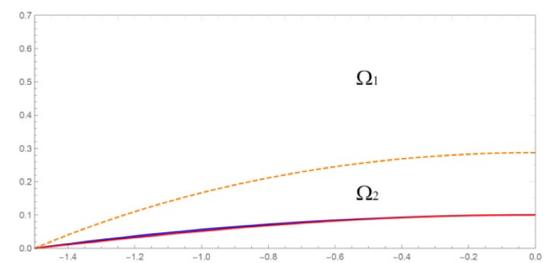


Fig. 12 - A comparison of two thrust lines

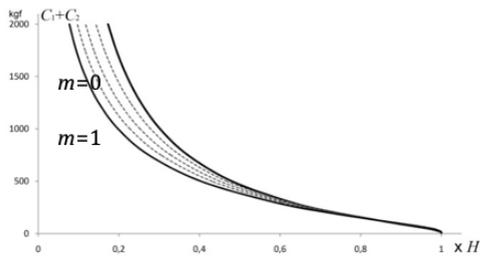


Fig. 13 - Thrust vs interseptor

Curves of grater order

On the basis of previous results, we guess that increasing the number of curves in a solution the stress state converges to the optimum satisfying Eqs.(1) and inequalities (2). Proceeding as before, at the third order it is

$$q_3(x_1) = (p_2(x_1) - p_3(x_1))\chi_2 S$$

$$\partial_1^2 p_3(x_1) = -\alpha_3 (p_2(x_1) - p_3(x_1))$$

$$p_3(x_1) = H\left\{ \begin{aligned} & (1 + \beta_{1,2}\beta_{1,3}\gamma_1 \cosh(x_1\sqrt{\alpha_1}) \\ & - (1 + \beta_{1,2})\beta_{2,3}\gamma_2 \cosh(x_1\sqrt{\alpha_2}) \\ & - [1 + \beta_{1,2}\beta_{1,3} \\ & - (1 + \beta_{1,2})\beta_{2,3}] \gamma_3 \cosh(x_1\sqrt{\alpha_3}) \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

Where $\alpha_3 = \sqrt{\chi_2 S / C_3}$, $\gamma_3 = \text{sech}(b\sqrt{\alpha_3})$, $\beta_{1,3} = C_1 / (C_3 - C_1)$, $\beta_{2,3} = C_2 / (C_3 - C_2)$ are set. By iterating at the fourth, fifth, ..., i -th order, the solution is got properly choosing the coefficients $\alpha_i = \sqrt{\chi_2 S / C_i}$, $\gamma_i = \text{sech}(b\sqrt{\alpha_i})$, $\beta_{j,i} = C_j / (C_i - C_j)$.

Concluding remarks and future work

A method suitable for computing a family of thrust lines in a masonry panel, assumed as perfectly no-tension, under its own weight, is presented. The construction of each curve, satisfying a system of second order differential equations and inequalities, in which the second derivatives of the searched curve is equal to the load divided by the thrust, is based on a strong assumption, that is all curves pass through the bottom corners of the panel. This assumption, indeed analytically convenient, is not really suitable for actual masonry panels, but correspond, on the contrary, to a boundary condition simply achievable in case of no-compression membranes, as for instance cloths and fabrics suspended to two pegs. Indeed, theory here used for a toy-model of masonry, can be straightforward applied to no-compression material, just reverting inequalities in this paper requiring the stress tensor be negative semi-definite to be positive semi-definite. We plan to explore this aspect in future work. Finally, first obtained results already suggest that the value of the thrust can be asymptotically approximated to the optimal one, which corresponds to that of minimal stored energy. Next steps of this research, will be in the direction of removing simplifying assumptions on boundary conditions and comparison with literature results.

REFERENCES

- [1] D. Francese, *Technologies for Sustainable Urban Design and Bioregionalist Regeneration*. London and New York: Routledge, 2016.
- [2] M. Angelillo, Ed. *Mechanics of Masonry Structures*, CISM Courses and Lectures, Springer, 2014, vol. 551.
- [3] J. Heyman, "The stone skeleton", *International Journal of Solids and Structures*, 1966, vol. 2, no.2, pp. 249-279.
- [4] E. Benvenuto, *An introduction to the history of structural mechanics, II: Vaulted structures and elastic systems*, New York: Springer, 1991.
- [5] Romano G., Romano M., "Sulla soluzione di problemi strutturali in presenza di legami costitutivi unilaterali", *Rendiconti dell'Accademia Nazionale dei Lincei, Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali*, 1979, vol. 67, pp. 104-113, [in Italian].
- [6] S. Di Pasquale, "Questioni di meccanica dei solidi non reagenti a trazione", *Proceedings of VI AIMETA Congress*, vol. 2, Genova, Italy, October 7-9, 1982, pp. 251-263, [in Italian].
- [7] S. Di Pasquale, *Statica dei solidi murari: teoria ed esperienze*, Internal report, Dipartimento di Costruzioni, Università di Firenze, Firenze, Italy, 1984 [in Italian].
- [8] A. Baratta, "Metodi di calcolo per strutture non reagenti a trazione", *Proceedings of VII AIMETA Congress*, Trieste, Italy, October 2-5, 1984, pp.275-286, [in Italian].
- [9] G. Romano, E. Sacco, "Sul calcolo di strutture non resistenti a trazione", *Proceedings of VII AIMETA Congress*, Trieste, Italy, October 2-5, 1984, pp. 217-226, [in Italian].
- [10] G. Castellano, M.G. Gallo, *Murature e dissesti: metodologia e tecniche di rilievo e rappresentazione*, Salerno: Pietro Laveglia, Italy, 1985 [in Italian].
- [11] G. Castellano, M. Angelillo, *La sicurezza a rottura delle strutture*, Fuorni, Salerno: Boccia, Italy, 1987 [in Italian].
- [12] P. Villaggio, "Stress diffusion in masonry walls", *Journal of Structural Mechanics*, 1981, vol. 9, no. 4, pp. 439-451.
- [13] M. Giaquinta, E. Giusti, "Researches on the equilibrium of masonry structures", *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, 1985, vol. 88, no. 4, pp. 359-392.
- [14] G. Del Piero, "Constitutive equations for linear elastic masonry-like materials and compatibility of the external loads", *Meccanica*, 1989, vol. 24, no. 3, pp. 150-162.
- [15] A. Fortunato, "Elastic solutions for masonry-like panels", *Journal of Elasticity*, 2010, vol. 98, no.1, pp. 87-110.
- [16] A. Fortunato, E. Babilio, M. Lippiello, A. Gesualdo, M. Angelillo, "Limit Analysis for Unilateral Masonry-like Structures", *The Open Construction and Building Technology Journal*, 2016, vol. 10, pp. 346-362.
- [17] A. Sinopoli, F. Foce, "Theoretical research on masonry and masonry arches in Italy", in *Arch '01-Third International Conference on Arch Bridges*, C. Abdunur, Ed. Paris,

France: Presses de l'École Nationale des Ponts et Chaussées, 2001, pp. 437-443.

- [18] D. Baraldi, A. Cecchi, A. Tralli, "Continuous and discrete models for masonry like material: A critical comparative study", *European Journal of Mechanics A/Solids*, 2015, vol. 50, pp. 39-58.
- [19] G. Castellano, *Appunti di Scienza delle Costruzioni*, 1987, Naples, Italy: CUEN [in Italian].
- [20] A. Centroni, M.G. Filetici, Editors, *Progetti d'eccellenza per il restauro italiano*, Roma: Gangemi, 2016 [in Italian].
- [21] R.S. Olivito, *Statica e stabilità delle costruzioni murarie*, Bologna: Pitagora, 2009 [in Italian].

NOTES

1. Since x_2 is along the direction of gravity, the component x_1 vanishes.
2. Along isostatic lines, Eqs.(1) are complemented by one equation from inequalities (2) and become locally isostatic, leading to a solution depending only on forces.
3. In no-tension materials, the solution is allowed to be not congruent.
4. In Eq. (3), $q(x_1) > 0$ if concordant with, $p(x_1)$ is concave, and $C > 0$ if compressive, with the force directed inward the panel.
5. From the equilibrium of an infinitesimal slice of $p(x_1)$ along x_1 , it is possible to see that the x_1 -component of the force acting tangentially to $p(x_1)$ satisfies, leading to $C(x_1) = C$.
6. On curve p_1 a stress-free boundary condition is achieved, i.e., the stress component orthogonal to the thrust line vanishes.
7. It like to intersect the surface in Fig. 11 with a bundle of planes passing through the vertical axis. Being the surface symmetric to the bisector to first and third quadrant, it suffices to determine sections of planes in between the axis and the bisector. Hence, $m \in [0,1]$.

LA CURVA DELLE PRESSIONI APPLICATA AD UNA LASTRA DI MATERIALE NRT SU DUE APPOGGI

Sommario

Nel presente lavoro si considera un metodo per la ricerca di una famiglia di curve delle pressioni in un pannellmurario di forma rettangolare, appoggiato in corrispondenza degli spigoli inferiori, soggetto al solo peso proprio. Si assume che il materiale sia omogeneo e non reagente a trazione. Le curve delle pressioni, descritte da equazioni differenziali che legano la derivata seconda della curva cercata al carico diviso la spinta, passano per i vertici vincolati. Tra i vantaggi del metodo vi è la possibilità di risolvere il problema in forma chiusa, ottenendo curve che possono essere utili per confronti con soluzioni numeriche. I risultati ottenuti mostrano che il valore della spinta agente, a cui corrisponde il minimo energetico, può essere approssimato asintoticamente.

Parole chiave: Muratura| materiale non reagente a trazione| curve delle pressioni| soluzione piana| soluzione in forma chiusa

La crescente sensibilità verso le tematiche inerenti lo Sviluppo Sostenibile, ed in particolar modo verso quelle orientate al perseguimento della Sostenibilità Ambientale – come la riduzione dell’“impronta” dei materiali impiegati in edilizia – ha stimolato sempre più la ricerca verso tecniche costruttive in grado di assicurare un risparmio in termini di risorse utilizzate, di riduzione dei rifiuti immessi, e di estensione della durabilità dell’opera realizzata. In particolar modo, vista la ridotta disponibilità di mezzi e materiali rispetto alle soluzioni attualmente disponibili, sono stati spesso presi ad esempio i sistemi in uso nell’edilizia tradizionale: un esteso catalogo di “buone pratiche” ricco di cultura e tradizione, in grado anche di abbattere i “costi ambientali” della costruzione[1]. Benchè la maggior parte dell’edilizia storica sia costituita da edifici in muratura, è interessante osservare come in Italia, dal dopoguerra ad oggi, acciaio e calcestruzzo armato abbiano “monopolizzato” il settore nelle nuove costruzioni per due fondamentali motivi: da un lato offrono prestazioni meccaniche di enorme rilievo, consentendo di realizzare progetti un tempo impossibili da mettere in pratica, e dall’altro si dispone di modelli di calcolo raffinati che permettono di dimensionare membrature che garantiscono adeguati livelli di sicurezza. Entrambe le tecniche comportano d’altro canto costi molto alti per l’ambiente, perché nella fase di produzione richiedono grandi quantità di energia e di materiale (si pensi all’estrazione del ferro o alle cave di marne) ed immettono rifiuti nell’ecosistema circostante (CO₂ e scorie d’altoforno), mentre nella fase di dismissione non è sempre possibile riusare o riciclare i differenti elementi (come accade per calcestruzzo di una trave o di un pilastro), che quindi devono essere portati a rifiuto. Anche la stessa manutenzione delle strutture, come purtroppo i recentissimi avvenimenti di cronaca ci ricordano, non è di semplice attuazione, perché lo “stato di salute” di componenti interne – come accade per i ferri d’armatura annegati nel conglomerato o per le parti d’acciaio in aderenza tra loro – è nascosto alla vista e non può essere diagnosticato con semplicità. Le strutture della nostra tradizione sono invece quasi sempre costituite da tecniche miste: le parti verticali sono realizzate in pietra, in mattoni cotti o, nelle zone rurali dove abbonda il terreno argilloso, in terra cruda, mentre quelle orizzontali sono in travi di legno o, negli edifici di maggiore pregio, ottenuti con superfici a volta o a cupola. L’impatto ambientale di questi manufatti certamente non è nullo, ma non è paragonabile a quello dell’acciaio e del calcestruzzo armato; inoltre, con la corretta manutenzione, è possibile raggiungere durate centenarie per le parti lignee e addirittura millenarie per quelle lapidee, con un evidente risparmio di risorse. È inoltre vero che tali strutture non sono in grado di sopportare elevate sollecitazioni, ma è altrettanto corretto affermare che gran parte

delle costruzioni non richiede elevate performaces meccaniche, per cui sarebbe auspicabile riservare le tecniche ad alte prestazioni per le grandi opere, e utilizzare quelle dalle caratteristiche più contenute per gli edifici ordinari. Purtroppo, ad esclusione del legno che può essere più facilmente modellato dal punto di vista meccanico, i solidi murari sono di complessa valutazione per due ordini di motivi:

- la loro forma non permette di applicare il Postulato di De Saint-Venant (il principale fondamento posto alla base della Teoria della Trave, che consente di semplificare il problema dell’equilibrio a tal punto da renderlo teoricamente risolvibile);
- i materiali impiegati (lapidei, ceramici, conglomerati) hanno tutti una scarsa resistenza alle sollecitazioni di trazione, ed è quindi necessario imporre tale limitazione nella ricerca dello stato di tensione che risolve l’equilibrio. In altri termini, le conoscenze che si applicano solitamente nel calcolo di una struttura, dal dimensionamento alla verifica, non possono essere utilizzate: sia per il tipo, a pareti portanti, che per il materiale, quasi completamente non resistente a trazione. Esistono, dunque, molti studi dedicati alla modellazione del comportamento delle murature [2]-[18]. Per quanto riguarda il primo problema, se vengono presi in considerazione esclusivamente i carichi verticali e non le forze orizzontali che rappresentano le azioni dinamiche dovute alle accelerazioni sismiche, il problema di carico si riduce ad uno stato di tensione membranale, dove le tensioni sono tutte appartenenti al piano in cui è contenuto il solido murario; adottando un sistema di riferimento $0x_1x_2x_3$, con x_3 perpendicolare alla parete ed x_2 equiverso all’accelerazione gravitazionale g , l’equilibrio interno deve soddisfare il sistema di equazioni (1), dove χ_2 rappresenta la forza di massa del materiale¹. Com’è noto ([19], p.32), imposte le condizioni al contorno statiche e cinematiche, il sistema fornisce infinite soluzioni in quanto è composto dalle due equazioni del sistema (1) e dalle tre componenti incognite del tensore di tensione. Tra le infinite soluzioni, quella esatta si manifesta nel punto di minimo energetico accumulato dal sistema meccanico ([19], Teoremi di estremo, §5.6, p. 62), e corrisponde all’unico stato di tensione capace di soddisfare le condizioni di congruenza interna ed al contorno del solido oggetto di studio. Anche se formalmente impostato, il problema è di soluzione complessa, ed è spesso approssimato utilizzando metodi numerici. Nel caso di solidi murari, il problema si complica in quanto, per tener conto della nulla (o quasi) resistenza alla trazione occorre soddisfare anche le tre disequazioni (2) (cfr. [7]). Tale vincolo interno, che impone al tensore σ di essere semidefinito negativo, richiama il Criterio di resistenza di Coulomb, per il quale il cerchio di Mohr dello stato di tensione deve essere contenuto nel semipiano negativo [7]. Ora, se la soluzione esatta soddisfa in ogni punto le disequazioni (2) in senso stretto, allora questa è anche soluzione per una lastra di materiale non reagente a trazione (NRT); in caso contrario, se lungo una linea isostatica si verifica che almeno una delle disuguaglianze (2) si annulli, allora il solido si parzializza, cioè si formano delle porzioni interne ad esso dove il materiale non concorre all’equilibrio². In altri termini, la forma geometrica del solido murario non corrisponde necessariamente alla parte di esso che partecipa all’equilibrio dei carichi assegnati. Non conoscendo le parti reagenti (la struttura in senso stretto) rispetto a quelle inerti (che equilibrano esclusivamente il loro peso) complica notevolmente il processo di ricerca della soluzione.

La curva delle pressioni

Nei solidi murari la cui base poggia direttamente al suolo o su altre parti della struttura, la ricerca di una soluzione equilibrata³ è di solito risolta applicando il principio della biella compressa: si considera cioè reagente soltanto la fascia di materiale compreso tra

la sollecitazione agente e la reazione vincolare (vedi Figura 2 e cfr. [20], p. 64), ma questa strategia di calcolo è applicabile solo se si trascurano le forze di massa interne, ragion per cui le linee isostatiche sono lineari [7] e il carico si trasmette tal quale lungo di esse. Tale ipotesi è una semplificazione eccessiva, in quanto l’ultima delle (2) non è lineare e non è possibile applicare il principio di sovrapposizione degli effetti. Trascurando l’errore che questo metodo comporta, la soluzione si ottiene infine sommando gli stati di tensione dovuti al carico (linee isostatiche inclinate come la sollecitazione esterna) con quelle generate dal peso proprio (linee isostatiche verticali). Più complessa risulta la ricerca dell’equilibrio quando si prendono in analisi porzioni di struttura con appoggi sui lati, ed il bordo inferiore libero: in tale condizione la biella compressa può essere sostituita da un poligono funicolare nel caso di forze concentrate (e da una curva delle pressioni per carichi distribuiti, Fig.3), ma quando si considerano le forze di massa χ_2 la mancanza di un appoggio alla base complica notevolmente il problema, che si risolve considerando il peso del pannello come un carico distribuito sul suo estradosso, equilibrato da una opportuna curva delle pressioni. Tale sistema, mutuato anche dagli studi sulla meccanica a collasso degli archi ([21], Il metodo di Méry, § 6.7, pp. 133 e seg.), ipotizza che le tensioni si trasmettano dal carico alla curva verticalmente in assenza di azioni tangenziali ($\sigma_{11} = \sigma_{12} = 0$), ma non tiene conto che la porzione al di sotto della curva resta inerte e quindi non dovrebbe essere considerata nella determinazione del carico (a vantaggio di sicurezza). Nel metodo proposto in questo articolo, si vuole invece determinare la curva delle pressioni, che tenga in considerazione della mancata partecipazione di questa porzione di materiale. Dato un generico carico $q(x_1)$, l’equilibrio lungo x_2 di un tratto infinitesimo della curva delle pressioni $p(x_1)$ da determinare permette di scrivere l’Eq.(3)⁴, dove C rappresenta la forza di compressione applicata alla curva, cioè la componente orizzontale della reazione al piede di $p(x_1)$ e che si trasmette invariata lungo p ⁵. Lo sforzo normale che, invece, si propaga lungo di essa è variabile; vale $N(x_1) = C\sqrt{1 + \partial_1 p(x_1)^2}$ ed ha il suo minimo in $\partial_1 p(x_1) = 0$, dove $N(0) = C$.

La prima curva

Per determinare la curva cercata, adottato il sistema di riferimento e le dimensioni indicate nella Fig.5, il carico $q_1(x_1)$ che insiste sulla curva delle pressioni $p_1(x_1)$ è $q_1(x_1) = (H - p_1(x_1))\chi_2 S$, con S lo spessore del pannello; l’Eq.(3) diviene: $\partial_1^2 p_1(x_1) = -\alpha_1 (H - p_1(x_1))$ avendo posto $\alpha_1 = \chi_2 S / C_1$. La soluzione, nell’ipotesi che la curva passi per i punti di coordinate $(-b, 0)$ e $(+b, 0)$ è fornita dall’Eq.(4), dove $\gamma_1 = \text{sech } b\sqrt{\alpha_1}$; la sua intercetta con l’asse x_2 è $i = H(1 - \gamma_1)$, mentre la sua curvatura varia al variare della compressione C_1 . In particolare, si osservi che:

$\lim_{C_1 \rightarrow +\infty} p_1(x_1) = 0$ e che:

$$\lim_{C_1 \rightarrow 0} p_1(x_1) = \begin{cases} H, & |x_1| < b \\ 0, & |x_1| = b \end{cases}$$

in altri termini, al crescere di C_1 da 0 (nessuna compressione) a $+\infty$ (massima sollecitazione), la curva “attraversa” tutte le ordinate, $dax_2 = H$ fino $ax_2 = 0$; la Fig.7 mostra come varia l’intercetta al variare della compressione. Lo sforzo normale $N_1(x_1)$ varia da un minimo $N_1(0) = C_1$ ad un massimo $N_1(\mp b) = C\sqrt{1 + \partial_1 p_1(b)^2}$, dove $\partial_1 p_1 = -H\gamma_1\sqrt{\alpha_1} \sinh(x_1\sqrt{\alpha_1})$. La Fig.8 mostra il risultato di una elaborazione numerica condotta su un pannello di $0.3 \text{ m} \times 0.7 \text{ m} \times 3.0 \text{ m}$ ed una densità di 1200 kg/m^3 : riducendo il valore di compressione a soli 123 N , la relativa curva si appiattisce lungo il bordo, in accordo con l’Eq. (4). Naturalmente, la compressione non può annullarsi (porterebbe un carico pari a zero), né crescere indefinitamente, perché sopraggiungerebbero dei limiti di resistenza alla compressione, il cui studio non rientra negli scopi di questa trattazione; è però plausibile pensare che esista un valore limite di C_1 oltre

il quale il pannello entrerebbe in crisi e si fratturerebbe, e la sua relativa curva delle pressioni sarebbe quella a minore curvatura raggiungibile.

La seconda curva

Si supponga di aver determinato la posizione della curva $p_1(x_1)$, e quindi di aver suddiviso la struttura in una porzione Ω_1 sorretta da p , ed una parte Ω_2 , che invece non è ancora equilibrata (Fig.5). Tale ultima porzione sembrerebbe destinata a separarsi dalla parte superiore ed a cadere, con la conseguente formazione di un "arco naturale". Esiste però la possibilità che si formi una seconda curva in grado di sostenere parte del materiale compreso tra p , e il bordo inferiore (diciamola Ω_2): la curva delle pressioni p_2 . Per ottenere questa curva, con riferimento alla Fig.9, il carico $q_2(x_1)$ che insiste su $p_2(x_1)$ è $q_1(x_1) = (p_1(x_1) - p_2(x_1))\chi_2 S$; la (3) quindi diviene $\partial_1^2 p_2(x_1) = -\alpha_2 (p_1(x_1) - p_2(x_1))$ avendo posto $\alpha_2 = \chi_2 S / C_2$. La soluzione, considerato che anche questa curva deve passare per i punti di coordinate $(-b, 0)$ e $(+b, 0)$ è data dall'Eq.(5) dove $\gamma_2 = \text{sech } b\sqrt{\alpha_2}$ e $\beta_{1,2} = \frac{\alpha_2}{\alpha_1 - \alpha_2} = \frac{C_1}{C_2 - C_1}$. L'intercetta con x_2 è fornita dalla (6) ed ha l'andamento asintotico mostrato in Fig.11. Si noti inoltre che (Fig.10):

$$\lim_{C_1 \rightarrow 0} p_2(x_1) = H(1 - \gamma_2 \cosh(x_1 \sqrt{\alpha_2})), \lim_{C_2 \rightarrow 0} p_2(x_1) = p_1(x_1) = H(1 - \gamma_1 \cosh(x_1 \sqrt{\alpha_1})), \lim_{C_2 \rightarrow +\infty} p_2(x_1) = 0.$$

Se, quindi, $C_1 \rightarrow 0$, la curva p_2 assume la medesima forma della (4) perché la porzione Ω_2 degenera; quando invece $C_2 \rightarrow 0$, p_2 coincide con p_1 ed è Ω_2 ad avere estensione nulla. Infine, se $C_2 \rightarrow +\infty$, la curva delle pressioni coincide con l'asse x_1 . Anche qui lo sforzo normale $N_2(x_1)$ varia da un minimo $N_2(0) = C_1$ ad un massimo $N_2(\mp b) = C\sqrt{1 + \partial_1 p_2(b)^2}$. Si noti poi che la (5) ha un punto di discontinuità per $C_2 \rightarrow C_1$, per il quale l'equazione differenziale che risolve il problema diviene $\partial_1^2 p_2(x_1) = -\alpha_1 (p_1(x_1) - p_2(x_1))$ la cui soluzione è $p_{2,1}(x_1) = H(1 + \frac{x_1}{2} \sqrt{\alpha_1} \gamma_1 \sinh(x_1 \sqrt{\alpha_1}) - \gamma_1 \delta_2 \cosh(x_1 \sqrt{\alpha_1}))$ avendo posto $\delta_2 = 1 + \frac{b}{2} \sqrt{\alpha_1} \tanh(b\sqrt{\alpha_1})$; in questo caso l'intercetta con l'asse x_2 sarà $i'' = H(1 - \gamma_1 \delta_2)$.

Confronto tra le curve

Si immagini di risolvere l'equilibrio di un pannello di materiale NRT sottoposto al peso proprio che, da un'osservazione sperimentale, ha mostrato di formare un arco naturale di freccia $x_2 = f$: si vuole determinare se

sia più corretto considerare agente solo una curva delle pressioni di monta f o due curve, di cui la seconda di intercetta f . Vista la complessità delle funzioni (4), (5) e (7), sono state condotte solo alcune simulazioni numeriche, rimandando lo studio formale ad una fase successiva della ricerca. Considerato un pannello di dimensioni $0.3 \text{ m} \times 0.7 \text{ m} \times 3.0 \text{ m}$, $\rho = 1200 \text{ kg m}^{-3}$ ed $f = 0.1 \text{ m}$, si sono determinate due curve (Fig.12): la prima -di colore blu -utilizzando la (4), ha una spinta di 25.5 kN (2495 kgf); la seconda -di colore rosso - ottenuta con la (7), ha una spinta di 6.3 kN (645 kgf), che si "raddoppia" per effetto della forza applicata alla curva tratteggiata in arancione, per un totale di 12.7 kN (1290 kgf). Si può inoltre vedere che la superficie portata dalle curve ($\Omega_1 + \Omega_2$) è pressoché identica: se ne deduce che la seconda soluzione è preferibile alla prima (data la minore sollecitazione orizzontale nell'appoggio). Per ulteriore controllo, è stato realizzato il diagramma in Fig.13, ponendo $C_2 = m C_1$ nella (7) e facendo variare m tra 0 e 17: sono riportati in ascissa i valori ottenuti dalla (7) ed in ordinata la somma delle spinte C_1 e C_2 . È evidente che il minimo, a parità di ascissa, si ottiene per $m = 1$.

Curve di ordine superiore

Avendo ipotizzato come vantaggiosa la soluzione che prevede due curve in luogo di una, è possibile immaginare di aumentarne il numero, convergendo - forse - verso il "reale" stato di tensione che si instaura nel pannello, e cioè nella soluzione delle (1) tenendo conto delle (2). Il procedimento risulterà essere il medesimo, e cioè $q_3(x_1) = (p_2(x_1) - p_3(x_1))\chi_3 S$, e l'equazione differenziale (3) risulterà $\partial_1^2 p_3(x_1) = -\alpha_3 (p_2(x_1) - p_3(x_1))$ da cui si ottiene la (8), avendo posto $\alpha_3 = \sqrt{\chi_3 S / C_3}$, $\gamma_3 = \text{sech}(b\sqrt{\alpha_3})$, $\beta_{1,3} = C_1 / (C_3 - C_1)$, $\beta_{2,3} = C_2 / (C_3 - C_2)$. Il procedimento può essere naturalmente iterato per il quarto, il quinto, ..., l' i -esimo ordine, per il quale i coefficienti $\alpha_i = \sqrt{\chi_i S / C_i}$, $\gamma_i = \text{sech}(b\sqrt{\alpha_i})$, $\beta_{j,i} = C_j / (C_i - C_j)$ permetteranno di scrivere la soluzione.

Conclusioni e prospettive

In questo lavoro è stato proposto un metodo per la ricerca di una famiglia di curve delle pressioni in un pannello soggetto al solo peso proprio realizzato in muratura, assunta come perfettamente non reagente a trazione. La costruzione di ogni curva, che soddisfa un sistema di equazioni e disequazioni differenziali del secondo ordine in cui il carico riscalato con la spinta

orizzontale eguagli la derivata seconda della stessa curva, è basata su una ipotesi semplificativa forte, ovvero tutte le curve devono passare per i vertici di base del pannello. È interessante osservare che questa ipotesi, molto conveniente dal punto di vista analitico, ma poco adatta a pannelli murari realistici, corrisponde, al contrario, ad una condizione al contorno facilmente ottenibile per materiali non reagenti a compressione (NRC), come ad esempio le membrane di tessuto sospese in due punti. Infatti, la teoria usata per un materiale NRT può facilmente essere applicata al caso NRC, richiedendo che il tensore delle tensioni sia semidefinito positivo: a questa particolare ed interessante questione, sarà dedicato un futuro studio. Infine, i primi risultati nel calcolo del valore approssimato della spinta, usando una o due curve delle pressioni, suggeriscono l'idea di un algoritmo in cui il valore di C_i possa essere asintoticamente approssimato a quello corrispondente al minimo energetico. I passi successivi di questa ricerca prevedranno la rimozione dell'ipotesi semplificativa sulle condizioni di bordo e il confronto con risultati esistenti in letteratura.

NOTE

1. Avendo orientato x_2 come \vec{g} , la componente χ_1 è identicamente nulla.
2. Si noti che, lungo tali isostatiche, il sistema di equazioni (1) si arricchisce di una equazione proveniente dal gruppo delle (2): in altri termini il sistema diventa localmente isostatico, e la soluzione risulta determinata dal solo schema di forze. Se la congruenza non è verificata, il materiale si frattura. Ivi.
3. Nei materiali NRT la soluzione può anche non rispettare la congruenza.
4. La (3) considera che $q(x_1) > 0$ se rivolto verso il basso, cioè se equiverso a \vec{g} , $p(x_1)$ rivolge la concavità verso il basso, e $C > 0$ se di compressione, ovvero rivolta verso l'interno del pannello murario.
5. Dall'equilibrio lungo x_1 di un tratto infinitesimo di $p(x_1)$ è possibile vedere che la componente lungo x_1 della forza agente tangenzialmente alla curva $p(x_1)$ soddisfa l'equazione $\partial_1 C(x_1) = 0$, da cui $C(x_1) = C$.
6. Sulla curva p_1 si realizza una condizione di bordo scarico: le sollecitazioni giacciono sulla curva delle pressioni, con componente ad essa ortogonale nulla. Il procedimento equivale a tagliare la superficie di Figura 11 con un fascio di piani passanti per l'asse verticale. Dato che la superficie è simmetrica rispetto alla bisettrice del primo e terzo quadrante, è sufficiente determinare le curve sezione dei piani che variano tra un asse e la bisettrice. Dunque, $m \in [0,1]$.