

MATHEMATICAL MODELS FOR ATYPICAL TERRACOTTA INFILL WALLS

Abstract

By adopting an investigation method that opens to multidisciplinary work with the creation of interoperable objects, this contribution discusses the survey of the Solimene ceramic factory, a listed building, today, to the hearth of the debates on the restoration of the modern. The topographical precision ensured by the total station Trimble Vision S6 has allowed to measure hundreds of points directly on the façade at the designated height.

Focusing our considerations on the points detected only for one "tower" of that beautiful front, we have studied its geometric genesis with a vector graphic software, obtaining an analytically verified geometric model. A finite element simulation illustrated the spatial configuration derived from the cylinder-glass wall intersection. The "form" conflicts have clearly appeared, resolved during the building construction. This study, far from being a curiosity of descriptive geometry, justifies the narrowing that makes the profiles irregular, posing static and structural questions.

Keywords: Survey | Right cylinder | Geometry processing | Terracotta infill walls | Solimene ceramics

The Solimene factory façade

The Solimene factory is the only Italian work of the architect Paolo Soleri, considered an organic architecture aulic and rare example [1]. The building, established between 1954-55 in Vietri Sul Mare, stands on a narrow terracing dug along the slopes of one of the Amalfi Coast promontories. Following the orography, the factory main façade is in the middle of the gulf of Salerno coast (Campania), imposing itself with the characteristic trapezoidal glass walls and the typical jutting out volumes (Fig. 1). The infill wall is adorned with overlapped "bottles" of clay whose circular bottoms protrude a few centimetres: the red bottoms in raw terracotta alternate with other enamelled with bright green (Fig. 2, 3).

The protruding volumes, apparently flared like large "vases", are anything but the result of a formal whim: at each level, in fact, the progressively convex upward shape increases the manufacturing area protecting from direct sunlight that – at this latitude – overheats the southern walls. Was this, we wonder, the most "frugal" that is economical and "sustainable" solution to combine function, structure, aesthetics and comfort?



Fig. 1 - Solimene Factory, south façade view. Vietri sul Mare, Italy (Photo by the authors).



Fig. 2 - Detail of the façade unique cladding.

Carefully observing the front, the volumes placed at the two building extremities clearly show perpendicular profiles. In terms of geometric modeling this means the representation of cylindrical surfaces generated by the infinite lines perpendicular to the bottom and top circumferences points, of known radius (Fig. 4, 5) [2]. Continuing to observe the façade, it seems equally clear that the other volumes configuration shows a profile rotation with irregular development. The published surveys on the ceramic factory available online, such as its three-dimensional models, faithfully represent the coating surfaces shape but do not interpret the geometrical model, inducing alternative hypotheses [3].

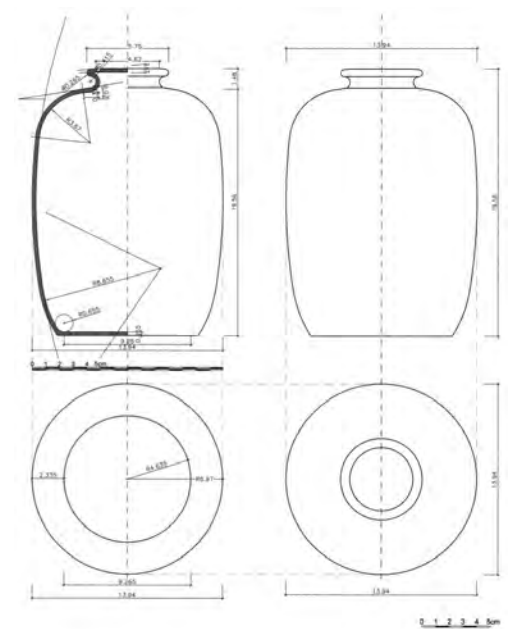


Fig. 3 - Survey of the bottles (mummarelle) inserted in the factory front.

The total station façade survey

The survey was executed with a Trimble S6 total station with Vision technology for video robotic control and site documentation. Centred the bubble at the starting, the coordinates origin and the instrument parameters are automatically set. The points of interest coordinates, measured progressively, were surveyed according rotating the alidade on the XY plane, around the z-axis, according to the measurement detected by the laser

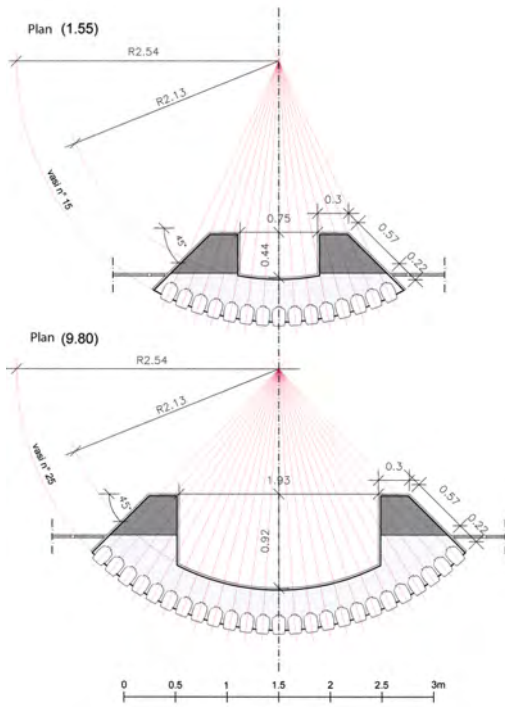


Fig. 4 - The plan direct survey at the first and last level.

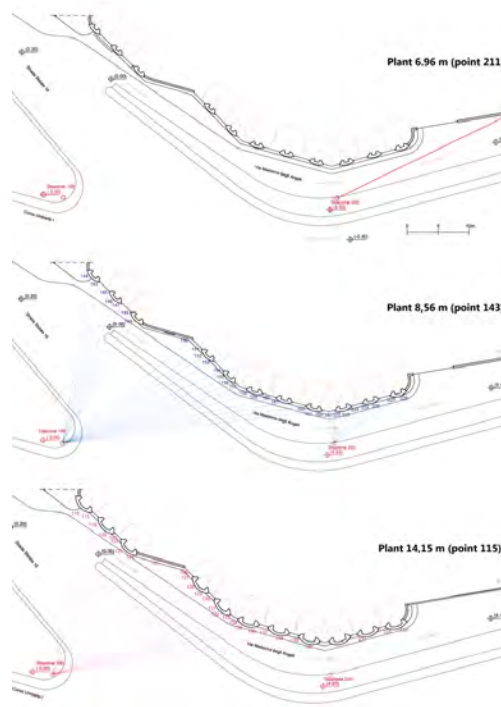


Fig. 6 - Processing data acquired with total station in Rhinoceros.

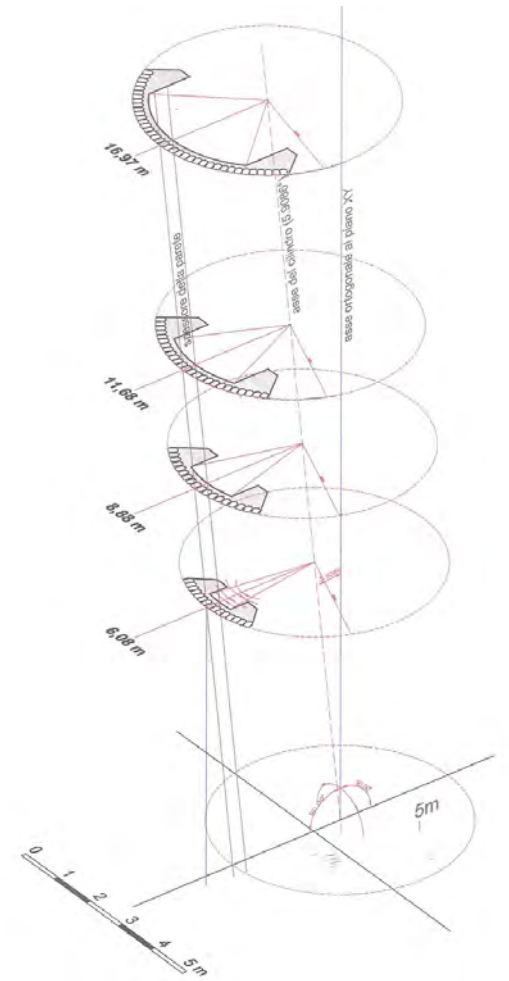


Fig. 7 - Circumferences, floor by floor, identifying the cylinder with inclined axis.

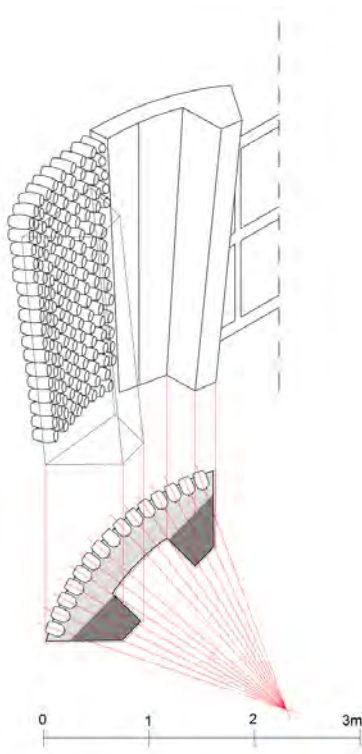


Fig. 5 - Axonometric schematic view of an element.

diastimeter. Rotating the head quickly, the measurement is displayed on the instrument screen and thanks to the Dr-Plus technology (for Direct Reflex measurements) the tracking is automatically adjusted to guarantee the exact data recording, obtained with a simple tap on the touch screen. Real-time video transmission helps to avoid errors and provides remote information to process data.

With acquired data we started to examine the geometric configuration in vector-environment, by importing the numerical

model in Rhinoceros, a 3D free form modeling software by Robert McNeel & Associates (Fig. 6).

Focusing on one of the façade giant “towers”, we rebuilt in the three-dimensional virtual space the first circumference at the height of 696 cm and the second at the height of 1415 cm,

identifying a cylinder with a 5.52° inclined axis (Fig. 7).

Conversely, if the vertex had been a proper point, and not infinitely far as it is, the surface would have been conical [4].

Accepted the hypothesis of the cylinder, what is – we wonder – the intersection between the oblique cylinders and the vertical plane where the glass walls are placed?

The mathematical model

We interpreted the data considering the reference system plane $z = 0$, so that the maximum height of 1415 cm coincides with that of the point placed at that height respect to the same plane, and the cylinder axis in the YZ plane to the right of the z-axis.

By setting the detected points coordinates, the $x = k$ equation type is derived. In fact, if the right cylinder directrix curve (l,m,n) is considered as a circumference determined by three coplanar points taken at 0.00 height, then this circumference with centre O and radius r will be described by the following equation [5]:

$$\begin{cases} x = r \cos\theta \\ y = r \sin\theta \\ z = 0 \end{cases}$$

That generalized become:

$$\begin{cases} x = r \cos\theta + tl \\ y = r \sin\theta + tm \\ z = tn \end{cases} \text{ whence } \begin{cases} x - tl = r \cos\theta \\ y - tm = r \sin\theta \\ t = \frac{z}{n} \end{cases}$$

To fix the reference such that the cylinder inclined axis belongs to the YZ plane (that is $x = 0$), we assumed the following axis direction (approximating the third digit):

$$l = 0, m = 1; n = 14.106$$

Hence, the cylinder equation is:

$$x^2 + \frac{(14.106y - z)^2}{199} = r^2$$

The generic intersection with a vertical plane (passing through the z-axis) is:

$$\begin{cases} x^2 + \frac{(14.106y - z)^2}{199} = r^2 \\ \lambda x + \mu y = 0 \end{cases}, \mu \neq 0$$

For instance, when $\lambda = 1, \mu = -1$:

$$\begin{cases} x^2 + \frac{(14.106y - z)^2}{199} = r^2 \\ x = y \end{cases}$$

We obtained the ellipse of the plane “ $\pi : x - y = 0$ ”, that is the equation:

$$2y^2 + \frac{z^2}{199} - \frac{28.212}{199} z = r^2$$

determining the conic section on the vertical plane, parallel to the $x = 0$ plane.

That being established,

- Assumed the cylinder height (H) of 1270 cm and the circumference radius (r) of 254 cm respect to the cylinder axis (data values from the instrumental survey), we define C as the chord and c as the semi-chord;
- Called a the distance from the circumference centre to the C chord, find out for direct observation that this distance is never greater than half the radius, we have:

$$a \leq \frac{H}{2} = \frac{254 \text{ cm}}{2} \leq 127 \text{ cm}$$

- Called k the trigonometric tangent of a right triangle whose cathetus are a and H, the following geometrical-mathematical relation is assumed:

$$tg = \frac{sen}{cos}$$

That is,

$$\frac{a}{H} = \frac{127 \text{ cm}}{1270 \text{ cm}} = \frac{1}{10} = 0,1 \text{ tg } (6^\circ) = k$$

To calculate the semi-chord at the Z-height (increasing from 0 to 1270 cm), therefore the arc subtended from the segment between the columns of the building at each of the five floors, we have:

$$c = \sqrt{r^2 - a^2} = \sqrt{r^2 - \frac{z^2}{100}}$$

Whence is derived:

- at 0 cm height, the radius is $r = 228$ cm;
- at 635 cm height, the radius is $r = 272$ cm;
- at 1270 cm height, the radius is $r = 285$ cm.

Conclusions

The figure 8 shows a FEM simulation performed to verify the geometrical interpretation of the ideal model of the “vases”: the results confirm the hypothesis. Since the average radius at the extremities is 256,5 cm (lower than the average height 272 cm) we deduced that the intersection is not a line but a branch of ellipse.

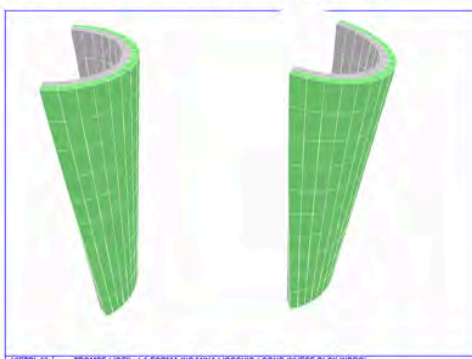
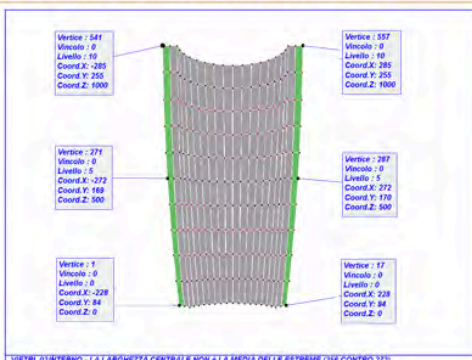
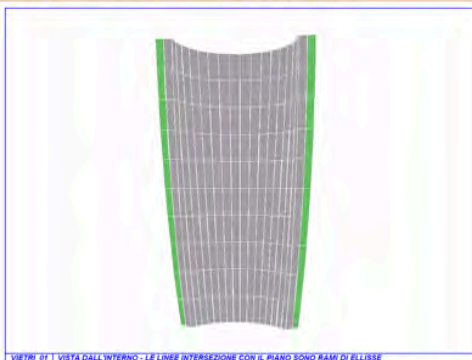
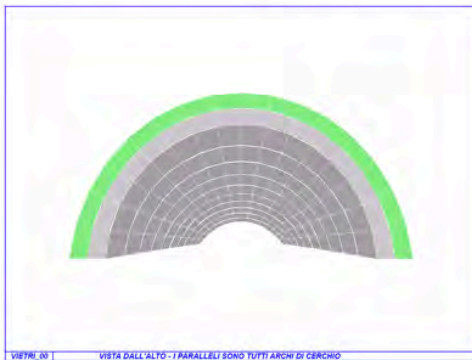
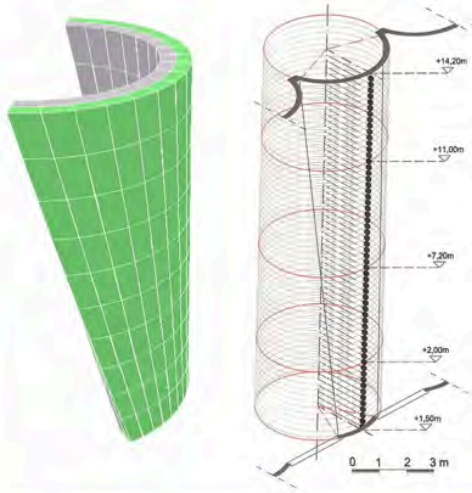


Fig. 8 - Finite Element Method simulation that shows the spatial geometry of the cylinder surface-glass wall intersection.

Consequently, if the cylinder generatrix is a circumference, the lines intercepted by each floor slabs will be ellipses, although little pronounced because of the cylinder axis slight slope [6].

The considerations derived from the mathematical procedure carried out on the experimental model let us to hypothesize the irregularities reason. In fact, we have found:

- The cylindrical infill walls elevation is guided by the jutting slab edges previously constructed;
- Culminating directly at the pillar sides between the trapezoidal glass walls, the wall surfaces are inclined forward while the glass walls planes are vertical.

The curve-intersection between the cylinder and the pillar is a portion of the ellipse due to the probable constructive compromises occurring during the building construction (Fig. 9, 10). Since the pillars surface is not wide enough to contain the whole curves-intersection, conflicts are created, but in place solved by decreasing the radius of the cylinder. It is analytically shown – as well is noted de visu – that the cylinder sections are circumferences at half of the towers height while, moving down or up, become ellipses even if very rounded and therefore approximable to circumferences.

In the light of the ascertained, those narrowings – paradoxically ignored so far by the numerous studies and critical surveys – are clearly visible to the naked eye and require, in view of their restoration, a careful analysis. In order to examine the structural effects, it would be useful for the building to benefit of a constructive digital model in accordance with BIM interoperable models that would document the Soleri’s work as well to transcribe the iconic aspects into objective levels of the shapes and attributes related to them.

This study, far from being a curiosity of descriptive geometry, justifies the narrowing that makes the profiles irregular, proved to be a place of knowledge and operational criticism. Experience reiterates to not blindly abandon ourselves to the automatic mechanisms of instruments, which, however sophisticated and precise, still require critical interpretation.

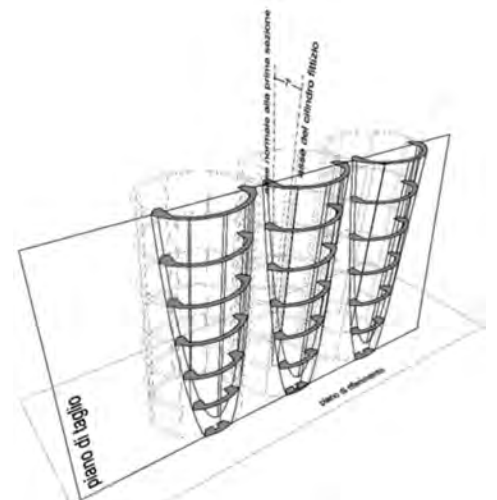


Fig. 9 - The curve-intersection between the cylinder and the pillar is a portion of the ellipse.

Specific analysis avoids to promoting approximate formal findings, verifying that are the tools to be of service to ideas and not vice versa. Often, the friendly software user interfaces address to design consistently linked to structure and function, by registering a phenomenon symmetrical to the deprecated rationalism of manner, also, as noted by the cult followers of geometry, reflection of laziness and incapacity [2].

REFERENCES

- [1] B. Zevi, 1960. Storia dell'architettura moderna. Torino: Einaudi, 2010, Vol. 2, 725 p. ISBN: 8806206052.
- [2] M. Docchi, 1980. Presentazione. In Pascucci Achille. Superfici rigate in architettura. Il paraboloide iperbolico. Roma: Kappa Edizioni, 1980.
- [3] A. Rossi, 1995. Dal vaso all'architettura della ceramica. Il disegno luogo e memoria. Firenze: Alinea, 1995, pp. 360-367. ISBN: 8881250349.
- [4] A. Sgrosso, 1996. La rappresentazione geometrica dell'architettura. Applicazioni di geometria descrittiva. Torino: UTET, 1996, pp. 224. ISBN: 8877504951.
- [5] S. Greco, P. Valabrega, 2009. Geometria analitica. Torino: Levrotto & Bella, pp. 585. ISBN: 8882181375.
- [6] H. Karmazyn Halyna, 2017. Dal modello sperimentale al modello matematico. Rilievo e Rappresentazione della parete della fabbrica Solimene. Tesi in Ingegneria Civile, Edile e Ambientale, Università degli Studi della Campania – Dipartimento di Ingegneria Civile, Design, Edilizia, Ambiente, Relatore: A. Rossi.

MODELLI MATEMATICI PER ATICIPI TOMPAGNI IN TERRACOTTA

Sommario

Adottando un metodo di indagine che introduce al lavoro multidisciplinare con la creazione di oggetti interoperabili, il presente contributo tratta del rilievo della fabbrica Solimene: un bene vincolato dalla soprintendenza e oggi al centro dei dibattiti sulle problematiche derivate dal restauro del moderno. La precisione topografica garantita dalla Stazione totale Trimble Vision S6, ha consentito di registrare centinaia di punti battuti direttamente in facciata alle quote designate. Concentrando le considerazioni sulle terne dei punti rilevati per un unico corpo intermedio aggettante, se ne studia la genesi geometrica in ambiente vettoriale, ricavandone un modello geometrico analiticamente verificato. Una simulazione agli elementi finiti ha illustrato la configurazione spaziale derivata dalla intersezione cilindro-piano vetrata. Evidenti sono apparsi conflitti per "forma", risolti in corso d'opera. Questo studio, lungi dall'essere una curiosità della geometria descrittiva, giustifica le strozzature che rendono i profili irregolari, ponendo interrogativi statici e strutturali.

Parole chiave: Rilievo | Cilindro retto | Componenti geometriche | Parete in terracotta | Solimene ceramiche

La facciata della fabbrica Solimene

La fabbrica Solimene è l'unica opera italiana dell'architetto Paolo Soleri, considerata un aulico e raro esempio di architettura organica [1]. L'edificio, fondato tra il 1954-55 a Vietri sul Mare, sorge su uno stretto terrazzamento scavato lungo le pendici di uno dei promontori della costiera amalfitana. Seguendo l'orografia, la facciata principale della fabbrica prospetta a mezza costa sul golfo di Salerno (Campania) imponendosi con le caratteristiche vetrate trapezoidali intervallate a corpi pieni variabilmente aggettanti (fig. 1). La parete è costituita da strati di "bottiglie" di argilla sovrapposte orizzontalmente con i fondi circolari aggettanti di qualche centimetro: i fondi rossicci in

terracotta grezza si alternano ad altri smaltati in verde brillante.

I corpi pieni, apparentemente svasati come grandi "vasi", sono tutt'altro che frutto di un capriccio formale: ad ogni livello, infatti, la forma progressivamente convessa verso l'alto, incrementa lo spazio a disposizione per le lavorazioni e protegge dalla luce diretta del sole che a questa latitudine surriscalda le pareti a mezzogiorno. Era questa, ci si domanda, la soluzione più "frugale", ovvero economica e "sostenibile", per coniugare funzione, struttura, estetica e comfort?

Osservando attentamente il prospetto, i volumi posti ai due estremi dell'edificio mostrano chiaramente profili a piombo. Sul piano della modellazione geometrica ciò significa rappresentare superfici cilindriche generate dalle infinite rette normali ai punti della circonferenza di base e quella di colmo, di raggio noto (fig. 2) [2].

Continuando ad osservare la facciata, appare altrettanto evidente che la configurazione degli altri volumi nel mezzo non è la medesima dei primi: apprezzabile ad occhio nudo l'inclinazione dei profili nel loro sviluppo irregolare.

I rilievi sulla fabbrica accessibili dal web, come i modelli tridimensionali che la rappresentano, restituiscono fedelmente l'andamento delle superfici di inviluppo ma non ne interpretano il modello geometrico, lasciando spazio ad ipotesi alternative [3].

Il rilevamento della facciata con stazione totale Il rilievo è stato attuato con una stazione totale Trimble S6 con tecnologia Vision per il video controllo robotico e la documentazione del sito. Messa "in bolla" la stazione all'accensione, risultano automaticamente impostati l'origine delle coordinate e i parametri dello strumento. Le coordinate dei punti di interesse, battuti nell'ordine, sono individuate ruotando l'alidada sul piano xy, attorno all'asse z, in base alla misura rilevata dal distanziometro laser. Lo strumento visualizza sul display quanto rileva e (grazie alla tecnologia Dr-Plus per misurazioni Direct Reflex) rettifica in automatico il puntamento così da garantire l'esatta registrazione dei dati, ottenuti con un semplice tocco sullo schermo tattile. La trasmissione video in tempo reale evita errori grossolani e fornisce a distanza informazioni utili a processare i dati.

Acquisiti i dati, se n'è studiata la configurazione geometrica in ambiente vettoriale importando il modello numerico le coordinate relative in Rhinoceros, un software di modellazione NURBS 3D di superfici sculturate (free form) della Robert McNeel & Associates (fig. 3).

Concentrando le nostre considerazioni per uno solo dei giganteschi "vasi" della facciata, abbiamo ricostruito nello spazio tridimensionale la prima circonferenza alla quota 696 cm e la seconda a quota 1415 cm, individuando un cilindro con un asse inclinato a 5,52° (fig. 4). Invece, se il vertice fosse stato un punto proprio allora sarebbe stato talmente lontano da non poterlo percepire nella scala del disegno e, di conseguenza, la superficie sarebbe stata conica [4].

Accettata l'ipotesi del cilindro, giacché una superficie conica di cui non si percepisce il vertice non è cantierabile, qual è l'intersezione tra i cilindri obliqui e il piano verticale delle vetrate?

Interpretiamo i dati considerando il sistema di riferimento con il piano $z = 0$, in modo che la quota massima di 1415 cm coincida con quella del punto posto a tale altezza rispetto al medesimo piano, e l'asse del cilindro nel piano yz alla destra dell'asse z.

Il modello matematico

Mettendo a sistema le coordinate dei punti rilevati, si ricava l'equazione del tipo $x = k$. Infatti, se si considera la curva direttrice del cilindro retto (l,m,n) come una circonferenza determinata da tre punti

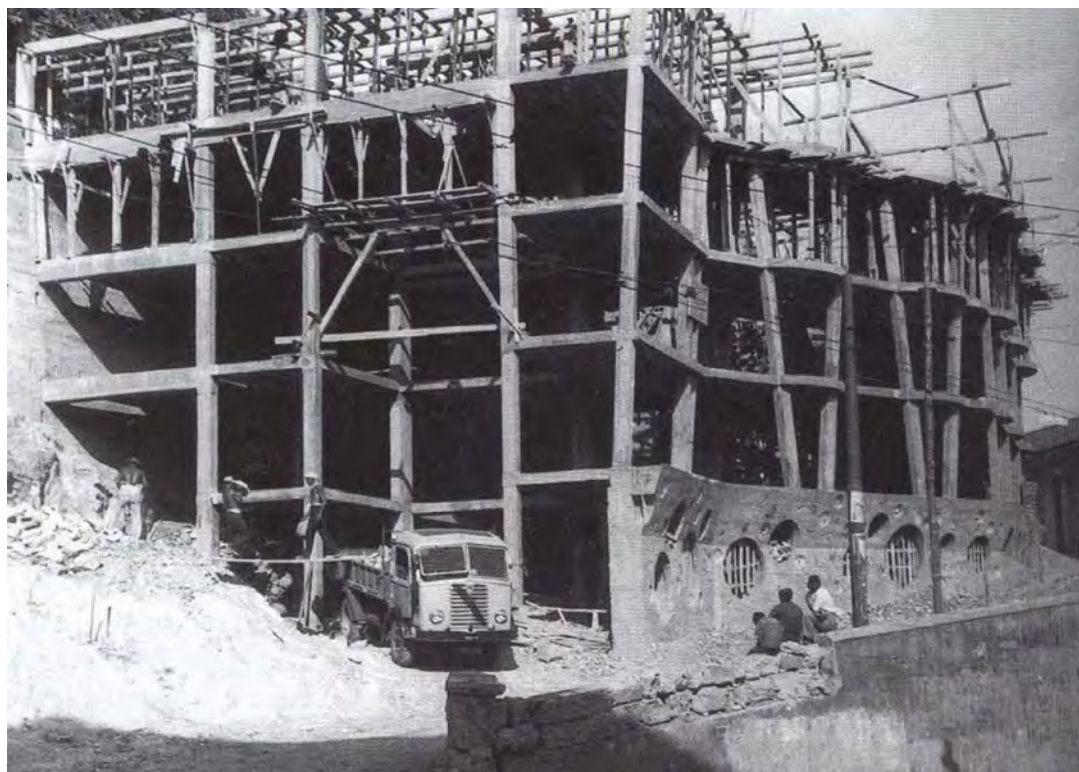


Fig. 10 - Building construction (Photo by Ayano Atsumi).

complanari (fig. 5a) presi a quota 0 cm, allora questa circonferenza di centro 0 e raggio r sarà descritta dalla seguente equazione [5]:

$$\begin{cases} x = r \cos\theta \\ y = r \sin\theta \\ z = 0 \end{cases}$$

Che generalizzata diventa:

$$\begin{cases} x = r \cos\theta + tl \\ y = r \sin\theta + tm \\ z = tn \end{cases} \text{ whence } \begin{cases} x - tl = r \cos\theta \\ y - tm = r \sin\theta \\ t = \frac{z}{n} \end{cases}$$

Per fissare il riferimento tale che l'asse inclinato del cilindro appartenga al piano yz (ossia x = 0) consideriamo la seguente direzione dell'asse (approssimando alla terza cifra):

$$l = 0, m = 1; n = 14.106$$

Allora, l'equazione del cilindro risulta:

$$x^2 + \frac{(14.106y - z)^2}{199} = r^2$$

La generica intersezione con un piano verticale (passante per l'asse z) è:

$$\begin{cases} x^2 + \frac{(14.106y - z)^2}{199} = r^2 \\ x = y \end{cases}$$

Ad esempio, per $\lambda = 1; \mu = -1$:

$$\begin{cases} x^2 + \frac{(14.106y - z)^2}{199} = r^2 \\ x = -y \end{cases}$$

Si ottiene l'ellisse del piano " $\pi : x - y = 0$ " ossia l'equazione:

$$2y^2 + \frac{z^2}{199} - \frac{28.212}{199}z = r^2$$

che sviluppata determina la sezione conica nel piano verticale, parallelo al piano $x = 0$. Ciò detto, assunta l'altezza del cilindro (H) di 1270 cm e il raggio (r) della circonferenza rispetto all'asse pari a 254 cm (elementi estratti dal rilievo strumentale), si definisce C la corda e c la semi-corda; detta a la distanza dal centro della circonferenza alla corda C, constatato per osservazione diretta che questa non è mai maggiore della metà del raggio, si ha:

$$a \leq \frac{H}{2} = \frac{254 \text{ cm}}{2} \leq 127 \text{ cm}$$

detta k la tangente trigonometrica di un triangolo rettangolo i cui cateti sono per l'appunto a e H, si assume la seguente relazione geometrico-matematica:

$$\text{tg} = \frac{\text{sen}}{\text{cos}}$$

Ovvero

$$\frac{a}{H} = \frac{127 \text{ cm}}{1270 \text{ cm}} = \frac{1}{10} = 0,1 \text{ tg}(6^\circ) = k$$

Per calcolare la semi-corda alla quota z (crescente da 0 a 1270 cm), ovvero l'arco sotteso dal segmento compreso tra i pilastri ad ognuno dei cinque livelli fuori terra, si avrà:

$$c = \sqrt{r^2 - a^2} = \sqrt{r^2 - \frac{z^2}{100}}$$

Da cui si ricava che:

- a quota 0 cm, il raggio r = 228 cm;
- a quota 635 cm, il raggio r = 272 cm;
- a quota 1270 cm, il raggio r = 285 m.

Conclusioni

In figura 9 è mostrata una simulazione per elementi finiti eseguita per verificare l'interpretazione geometrica del modello ideale: gli esiti del calcolo confermano l'ipotesi: la media dei raggi agli estremi è pari a 256,5 cm e, pertanto, inferiore al valore dell'altezza media (272 cm) [6].

Le riflessioni scaturite dal procedimento matematico condotto sul modello sperimentale hanno permesso di avanzare ipotesi sulle irregolarità riscontrate. Si è infatti accertato che:

- la muratura cilindrica in elevazione è stata guidata dai bordi a cui si attesta per step successivi al getto dei solai;
- terminando direttamente al fianco dei pilastri inseriti nella facciata tra le vetrate trapezoidali, la superficie risulta inclinata e aggettante verso l'esterno mentre i piani delle vetrate sono a piombo.

La curva intersezione tra cilindro e pilastro non rettilinea ma porzione di ellisse causa probabile dei compromessi costruttivi intervenuti in corso d'opera. Non essendo la superficie dei pilastri abbastanza larga da contenere l'intero andamento delle curve-intersezione: si creano dei conflitti, in coro d'opera risolti diminuendo il raggio del cilindro. Si dimostra analiticamente e de visu si constata, che le sezioni del cilindro a mezza altezza dei corpi aggettanti sono circonferenze mentre invece, spostandosi verso il basso o l'alto le sezioni quindi i solai diventano ellissi anche se molto arrotondate e quindi approssimabili a delle circonferenze. Alla luce di quanto accertato le strozzature ben visibili ad occhio nudo e paradossalmente trascurate fino ad ora dai numerosi studi e rilievi critici, richiedono, in vista del loro restauro, un'attenta analisi. Per esaminare le conseguenze strutturali sarebbe utile l'edificio si giovasse di un modello digitale costruttivo realizzato secondo procedure BIM. Il flusso di lavoro consentirebbe di rendere interoperabili modelli che oltre a documentare globalmente l'opera del Soleri, trascriverebbero gli aspetti iconici in oggettivi livelli astrattivi delle forme e degli attributi ad essi correlati. Pertanto l'analisi presentata lungi dall'essere una curiosità della geometria descrittiva si è dimostrato un luogo di critica operativa. L'esperienza ribadisce la necessità di non abbandonarsi ciecamente ai meccanismi automatici degli strumenti, che, per quanto sofisticati e precisi, richiedono pur sempre di essere interpretati criticamente. Ottiche di letture specifiche evitano di promuovere risultanze formali approssimate, verificando che sono gli strumenti informatici ad essere di servizio alle idee e non viceversa. Troppo spesso, le interfacce facilitate, indirizzano a non

progettate bombature avulse dalla struttura e dalla funzione facendo registrare un fenomeno simmetrico al tanto deprecato razionalismo di maniera, anch'esso, come è stato notato dai cultori della geometria, riflesso di pigrizia e incapacità [2].